洛必达法则证明及其应用探讨

杨　雄[1]，周立芬[2]

（1. 娄底职业技术学院，湖南 娄底 417000; 2. 邵阳县第一高级中学，湖南 邵阳 422100）

摘要：洛必达法则是求未定式极限的重要方法. 阐释洛必达法则的内容及证明、法则的推广、法则应用注意事项及其它未定式类型转换成基本未定式类型的方法. 应用实际案例分析洛必达法则在解题中产生错误原因，分析洛必达法则在求数列极限、各类未定式极限和函数某点连续条件下极限的问题. 应用洛必达法则证明多个命题，这些命题能够解决一些问题，为洛必达法则的教学、学习及应用提供参考.

关键词：洛必达法则；极限求解；命题；应用

中图分类号：O171　　文献标识码：A　　文章编号：1672－3465（2024）04－0071－06

洛必达法则是一种求未定式极限方便且有效的方法. 未定式极限是指两个无穷小量之比或两个无穷大量之比的极限，记为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型，此是两类基本未定式. 未定式极限或存在或不存在，即使极限存在也不能用“商的极限等于极限的商”的法则直接进行求解，需要探讨一种有效的求解未定式极限方法，此方法就是洛必达法则. 它不仅可以解决两类基本未定式类型的极限问题，还可以解决$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^{∞}，0^0，∞^0未定式等类型的极限问题. 对于后面的几类未定式的极限求解，要转化为基本未定式类型，再应用洛必达法则求解[1]. 文章主要探讨洛必达法则的证明、分析应用洛必达法则求极限出错原因、同题中连续应用洛必达法则求极限问题、应用洛必达法则求解数列极限问题、洛必达法则与其它方法配合应用求极限问题及函数连续条件下应用洛必达法则求极限问题.

1　洛必达法则内容、应用注意事项及其他类型未定式的转换

1.1　洛必达法则内容

定理 1　设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，$f(x)$，$g(x)$在$U_0(a)$内可导，且$g'(x)\neq 0$，若$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$为有限数或无穷），则$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. 其中$x\to a$改为$x\to a+0$或$x\to a-0$结论仍然成立[2].

证明：如果$f(x)$，$g(x)$在$x=a$处连续，显然有$f(a)=0$，$g(a)=0$. 如果$x=a$是$f(x)$，$g(x)$的不连续点，因为极限存在，一定是可去间断点. 不妨设$f(a)=0$，$g(a)=0$，则可以认为$f(x)$与$g(x)$在$x=a$处连续. 设x为a的邻域内一点，那么，在以x及a为端点的区间上，柯西中值定理的条件均满足，因此有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\text{（}\xi\text{ 在 }x\text{ 与 }a\text{ 之间），}\tag{1}$$

故当$x\to a$时，$\xi\to a$，（1）式两端取极限得

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},\tag{2}$$

即（2）式是定理 1 的结论，故定理 1 成立.

定理 2　设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，$f(x)$，$g(x)$在$U_0(a)$内可导，且$g'(x)\neq 0$. 若$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$为有限数或无穷），则$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. 其中$x\to a$改为$x\to a+0$或$x\to a-0$结论仍然成立.

证明：$\because\ \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$，$\therefore\ \forall\varepsilon>0$，$\exists x_1\in U_0(a)$，对于一切$x\in(a,x_1)$（或$x\in(x_1,a)$），都有

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2},\tag{3}$$

对$f(x)$与$g(x)$在$[x,x_1]$上应用柯西中值定理，则有

收稿日期：2024－06－25

作者简介：杨雄（1977—），男，湖南邵阳人，副教授，硕士，主要从事高等数学教学及应用研究.

中国知网　https://www.cnki.net

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}-A\right|=\frac{f'(x)}{g'(x)},\xi\in(x,x_1)\subset(a,x_1),\tag{4}$$

由(3),(4)可得

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2},\tag{5}$$

又因为，

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|=$$

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|\cdot\left|\frac{[g(x_1)-g(x)\cdot f(x)]}{[f(x_1)-f(x)]\cdot g(x)}-1\right|=$$

$$\left|\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|\cdot\left|\frac{g(x_1)/g(x)-1}{f(x_1)/f(x)-1}-1\right|,$$

由(5)式可知，当 $x\to a$ 时，$\left|\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|$ 是有界量，又由 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，当 $x\to a$ 时，$\left|\frac{g(x_1)/g(x)-1}{f(x_1)/f(x)-1}-1\right|$ 是无穷小量，进而有，当 $x\to a$ 时，$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|$ 也是无穷小量，即 $\exists\delta>0$，使得当 $a<x<a+\delta$ 时，则有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\tag{6}$$

进而对一切 $a<x<a+\delta$，由(5),(6)式可得

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|=$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}+\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}-A\right|\leqslant$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|+\left|\frac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}-A\right|<\varepsilon,$$

故有 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$

定义1 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，$\exists c>0$，$x\in(c,+\infty)$ 时，$f(x)$，$g(x)$ 可导，且 $g'(x)\neq0$. 若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 为有限数或无穷），则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. 其中 $x\to+\infty$ 改为 $x\to-\infty$ 或 $x\to\infty$ 结论仍然成立.

定义2 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$，当 $|x|>c$ 时，$f(x)$，$g(x)$ 可导，且 $g'(x)\neq0$. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 为有限数或无穷），则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. 其中 $x\to\infty$ 改为 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$ 结论仍然成立.

1.2 广义洛必达法则

在定理2和定义2中，若对条件进行弱化，洛必达法则仍然成立，即不必验证分子 $f(x)$ 是否为无穷大，也可利用洛必达法则求解极限，进而得到洛必达法则的一般情形.

定理3 设 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，$f(x)$，$g(x)$ 在 $U_0(a)$ 内可导，且 $g'(x)\neq0$. 若 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 为有限数或无穷），则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. 其中 $x\to a$ 改为 $x\to a+0$ 或 $x\to a-0$ 结论仍然成立.

证明：此证明 A 是有限的情况，$\because\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$，所以，对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，使得当 $x\in U_0(a,\delta_1)$ 时，则有 $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$

$\therefore g'(x)\neq0$，由柯西中值定理可知，对 $x_1\in U_0(a,\delta_1)$，$\exists x\in(x_1,a)$ 或 (a,x_1)，使得 $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，因此 $\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-A\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是，当 $x\neq a$ 时，进而有

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)}+\frac{f(a)}{g(x)}=$$

$$\frac{g(x)-g(a)}{g(x)}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}+\frac{f(a)}{g(x)}=$$

$$\left(1-\frac{g(a)}{g(x)}\right)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}+\frac{f(a)}{g(x)},\tag{7}$$

因此根据(7)式及基本不等式有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|=$$

$$\left|\left(1-\frac{g(a)}{g(x)}\right)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}+\frac{f(a)}{g(x)}-A\right|\leqslant$$

$$\left|1-\frac{g(a)}{g(x)}\right|\cdot\left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-A\right|+\left|\frac{f(a)-Ag(a)}{g(x)}\right|,\tag{8}$$

又因为 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，所以，$\exists\delta>0$，使得当 $x\in U_0(a,\delta)$ 时，有

$$0<1-\frac{g(a)}{g(x)}<1,\left|\frac{f(a)-Ag(a)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\tag{9}$$

因此，根据(8),(9)式，对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in U_0(a,\delta)$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\tag{10}$$

进而根据(10)式有 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$，故定理3

中国知网 https://www.cnki.net

成立.

定义3 设 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$，当 $|x|>c$ 时，$f(x)$，$g(x)$ 可导，且 $g'(x)\neq 0$，若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（$A$ 为有限数或无穷），则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$. 其中 $x\to\infty$ 改为 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$ 结论仍然成立[3].

命题1 设 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内可导，若极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 都存在，则有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

证明：假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$，根据定理3，则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=A$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\times B=0$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

命题2 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内 n 阶导数存在，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)$ 都存在，则有

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=0\ (k=1,2,\cdots,n).$$

证明：根据定理3，则有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^k}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{kx^{(k-1)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f''(x)}{k(k-1)x^{k-2}}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}=\dfrac{1}{k!}\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)$，又 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)$ 都存在，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^k}=0$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=0\ (k=1,2,\cdots,n)$.

命题3 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=A$（$A$ 为有限数或无穷），则有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

证明：根据定理3有，

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{[e^x f(x)]'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)+e^x f'(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=A,$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，

又 $\because\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=A$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

命题4 设 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内可导，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[k_1 f(x)+k_2 f'(x)]=A$（其中 k_1，k_2 为正数），则有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{A}{k_1},\ \lim_{x\to+\infty} f'(x)=0.$$

证明：根据定理3，则有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{(k_1/k_2)x}f(x)}{e^{(k_1/k_2)x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(k_1/k_2)e^{(k_1/k_2)x}f(x)+e^{(k_1/k_2)x}f'(x)}{(k_1/k_2)e^{(k_1/k_2)x}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(k_1/k_2)f(x)+f'(x)}{(k_1/k_2)}=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+\frac{k_2}{k_1}f'(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{k_1}[k_1 f(x)+k_2 f'(x)]=\frac{A}{k_1},$$

所以，$\dfrac{k_2}{k_1}\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+\dfrac{k_2}{k_1}f'(x)-f(x)\right]=\dfrac{A}{k_1}-\dfrac{A}{k_1}=0$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

1.3 应用洛必达法则求未定式极限注意事项

应用洛必达法则求极限应注意几点：（ⅰ）每次使用洛必达法则前，要注意验证条件的成立，若条件成立可用，否则不能用；（ⅱ）若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 既不存在也不是 ∞ 及通过应用洛必达法则求导后出现循环式的情况，即通过几次求导后的极限式又回到原式极限，则洛必达法则失效；（ⅲ）若 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 又是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限，可继续应用洛必达法则，只要符合洛必达法则条件，可连续应用，一直用到求出极限为止；（ⅳ）用洛必达法则求极限时，也要注意配合其他求极限的方法与技巧，如等价无穷小因子替换，变量替换，恒等变形，有确定极限的因子先求出极限等，即与其它求极限的方法配合应用，解题效果更佳[4].

1.4 其它类型的未定式转化为基本类型未定式分析

（ⅰ）$0\cdot\infty$ 型极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ 转化为 $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{1/g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$.

（ⅱ）$\infty-\infty$ 型极限转化为 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\left[1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]$. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=r$，$r=1$ 时，转化为 $\infty\cdot 0$ 型，进一步可转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型；若 $r\neq 1$，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\infty$ 不是未定式.

（ⅲ）[5] 1^∞，0^0，∞^0 型极限转化为 $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$，此时是 $0\cdot\infty$ 型，进一步可转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

（ⅳ）求数列极限转化为函数极限，若为未定式可用洛必达法则求解，设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A\Rightarrow$ 对任意一串

中国知网 https://www.cnki.net

数列 x_n，只要 $x_n \neq a(n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$，则有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$. 由此得到求数列极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 的一种方法，即转化为求函数的极限. 若可找到一个函数 $y = f(x)$，又一串数列 x_n，使得 $y_n = f(x_n)$，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$，只要 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$，则有 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 转化为求 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 是未定式极限，通常应用洛必达法则求解. 其他极限过程也有类似结论，如 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = A$，$y_n = f(n)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = A$.

2 应用洛必达法则具体求解极限的案例分析

洛必达法则是一种求解极限非常有用的方法，但此方法不是万能的，不是对所有未定式极限都能求解，是有前题条件的，只有满足洛必达法则条件才能使用.

2.1 应用洛必达法则错解案例分析

例 1 求极限(ⅰ) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$;

(ⅱ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\cos x}{\sin x}$.

解:(ⅰ) 错误解: 因为 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$，此时，发现右端极限不存在，所以判断左端极限也不存在，即原极限不存在.

分析: 这种解法错误，因为洛必达法则指明，在适当条件下，$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$，而这里 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，也不是 ∞，不具备用洛必达法则的条件，即 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在也不是 ∞，不能断定原极限不存在，只是说明应用洛必达法则求解失效了，应想办法采用其他方法求解.

正确解: 应用极限的四则运算法则及有界函数乘以无穷小仍然是无穷小进行求解，即

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\sin x/x}{1-\sin x/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+(1/x)\cdot\sin x}{1-(1/x)\cdot\sin x} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

(ⅱ) 错误解: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+\cos x)'}{(\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sin x}{\cos x} = 1.$

分析: 洛必达法则是求 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限的一种方法，此极限既不是 $\dfrac{0}{0}$ 型，也不是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，不能应用洛必达法则求解[2]. 应注意洛必达法则不是求极限的万能公式，应用是有前题条件的，每用一次必须验证条件是否成立，只有条件成立才能应用.

正确解法: 应用无穷大与无穷小的关系求解，因为 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{0}{2} = 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\cos x}{\sin x} = \infty$.

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

错误解: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(e^x - e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(e^x + e^{-x})'}{(e^x - e^{-x})'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

分析: 虽然有时函数满足洛必达法则条件，但经过几次应用洛必达法则之后，又回到了原式，因此，洛必达法则失效，像这种情况只能用其它求解极限的方法解决.

正确解法: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$

2.2 洛必达法则在求同一函数极限中连续多次应用案例分析

例 3 求极限(ⅰ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$;

(ⅱ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x + 3^{-x} - 2}{x^2}$.

解:(ⅰ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - x^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin^2 x - x^2)'}{(x^4)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - 2x}{4x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin 2x - 2x)'}{(4x^3)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{6x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos 2x - 1)'}{(6x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-2\sin 2x}{12x} = -\dfrac{1}{3}$

(ⅱ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x + 3^{-x} - 2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(3^x + 3^{-x} - 2)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(3^x - 3^{-x})\ln 3}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[(3^x - 3^{-x})\ln 3]'}{(2x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(3^x + 3^{-x})\ln^2 3}{2} = \ln^2 3$

分析: 若用洛必达法则求 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限得到的 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 还是 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限，可连续用洛必达法则，只要符合条件一直用到求出极限为止，若用到某一步极限不存在，则法则失败.

2.3 洛必达法则在数列求极限中的应用案例分析

中国知网 https://www.cnki.net

例4[7] 求下列数列的极限.

（ⅰ）$I=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{a^{\sqrt{n}}}$，其中 $a>1$ 为常数；

（ⅱ）$I=\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\left(2^{\frac{1}{n(n+1)}}-3^{\frac{1}{n(n+1)}}\right)$；

（ⅲ）$I=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{t}{n}+\frac{t^2}{2n^2}\right)^{-n}$，其中 t 为常数.

解：将利用函数极限及洛必达法则求这几个数列的极限，为数列极限求解提供一种方法.

（ⅰ）因 $a>1$ 为常数，设 $f(x)=\frac{x^2}{a^x}$，则

$$I=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(a^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{a^x\ln a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(a^x\ln a)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{a^x\ln^2 a}=0$$，于是，由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty\Rightarrow I=\lim\limits_{n\to+\infty}f(\sqrt{n})=0$.

（ⅱ）$$I=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}\frac{2^{\frac{1}{n(n+1)}}-3^{\frac{1}{n(n+1)}}}{\frac{1}{n(n+1)}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\frac{1}{n(n+1)}}-3^{\frac{1}{n(n+1)}}}{\frac{1}{n(n+1)}}=\lim_{x\to0}\frac{2^x-3^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(2^x-3^x)'}{(x)'}=$$

$$\lim_{x\to0}(2^x\ln2-3^x\ln3)=\ln\frac{2}{3}$$

（ⅲ）因为对 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\Rightarrow$ 对 $\forall x_n\neq0$，$x_n\to0(n\to+\infty)$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=e$.

于是 $t\neq0$ 时，设 $x_n=\frac{t}{n}+\frac{t^2}{2n^2}$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$，$I=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}(-nx_n)}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}(-nx_n)}$ 又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}(-nx_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-t-\frac{t^2}{2n}\right)=-t$，因此，$I=e^{-t}$.

分析：对于 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型等数列极限，可转化为其对应的函数极限，再运用洛必达法则进行求解. 即对数列 $\{x_n\}$ 的情形，若把 x_n 看作整标函数 $f(n)$，则 $f(n)$ 是 $f(x)$ 的特殊取法. 因此，可先求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，再设 $x=n$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$.

2.4 洛必达法则对其它未定式求极限分析

例5 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3^x)^{\frac{1}{x}}$.

解：$\because\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x+3^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+3^x}(1+3^x\ln3)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x\ln^2 3}{1+3^x\ln3}=\ln3$，$\therefore\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x+3^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\ln3}=3$.

分析：当幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 为 $0^0,1^\infty,\infty^0$ 型未定式时，求极限要用取对数方法，先化为 $0\cdot\infty$ 型，再化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，然后用洛比达法则求出极限. 一般有两种书写形式，一种是写成 $\lim f(x)^{g(x)}=\lim e^{\ln f(x)^{g(x)}}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$ 的形式，再将其化为 $e^{\lim\ln f(x)/\frac{1}{g(x)}}$，求出极限. 另一种先写成 $\lim g(x)\ln f(x)=\lim\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}$，再写成 $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$ 的形式求出极限.

例6 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\tan7x}{\ln\tan2x}$.

解：$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\tan7x}{\ln\tan2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{7\sec^2 7x}{\tan7x}\Big/\frac{2\sec^2 2x}{\tan2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{7\sin2x\cos2x}{2\sin7x\cos7x}=\frac{7}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{4x}{14x}=1.$$

分析：根据需要求解极限函数的特征，有时在使用洛必达法则之前和之中，要不断对函数进行化简，并配合其它求极限方法，使计算过程更为简捷.

例7 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$.

解：方法一，$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-x\sin x}{\cos x}=2.$$

方法二，$$\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2/2}=2.$$

分析：洛必达法则只是计算未定式极限一种较普遍的方法，它不是惟一的，也不是最简捷的，所以在使用中要认真考察. 因此，在使用洛必达法则的同时，可使用两个重要极限、等价无穷小代换、变量代换、有理分式函数时的次数比等方法，从而迅速得出结果，这就要求熟练掌握求极限的各种方法.

3 函数在 $x=a$ 处连续条件下应用洛必达法则探讨导数问题

命题5 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，在 $U_0(a)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=A$，则有 $f'(a)=A$.

证明：求 $f'(a)$，即求极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$，在 $f(x)$ 于 $x=a$ 处连续的条件下，这是 $\frac{0}{0}$ 型极限，可用洛必达法则证明，于是有 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]'}{(x-a)'}=\lim\limits_{x\to a}f'(x)=A$.

分析：（ⅰ）命题5结论表明，若不知道 $f(x)$ 在 x

中国知网 https://www.cnki.net

$=a$ 是否可导，但知道 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，在 $x=a$ 附近（不含 a 点）可导且导函数 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处存在极限，即 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=A$，则可断定 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导且 $f'(a)=A$，进而有 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处连续，即 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=f'(a)=A$. 即此命题为求函数某点的导数值提供了一种方便的方法.（ⅱ）若 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，在 $U_0(a)$ 可导且 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ 不存在，不能判断 $f'(a)$ 不存在，此时要具体问题具体分析，可按定义考察 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. 此时若 $f'(a)$ 存在，而且 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)$ 不存在，说明导函数 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处不连续.

例 8[8] 设

$$f(x)\begin{cases}\dfrac{\sin 2x-\tan 2x}{x}, x>0,\\(1+x^2)^{\frac{4}{3}}-\cos 2x, x\leqslant 0,\end{cases}$$ 求 $f'(0)$.

解：$\because \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x-\tan 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(2\cos 2x-2\sec^2 2x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}[(1+x^2)^{\frac{4}{3}}-\cos 2x]=0$，$f(0)=0$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$ 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又 $\because \lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x(\tan^2 2x+2\sin^2 x)-\sin 2x+\tan 2x}{x^2}=0,$$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}[\frac{8}{3}(1+x^2)^{\frac{1}{3}}+2\sin 2x]=0$，$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$，则由命题 5 可得 $f'(0)=0$.

命题 6 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 右（左）连续，在 $x=a$ 右邻域 $(a,a+\delta)$（左邻域 $(a-\delta,a)$）可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=A(\lim\limits_{x\to a}f'(x)=A)$，则 $f'_+(a)=A(f'_-(a)=A)$.

证明：$\because f'_+(a)$ 存在，$\therefore \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在，又 $\because f(x)$ 在 $x=a$ 处右连续，则此极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型，于是由洛必达法则可得 $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{[f(x)-f(a)]'}{(x-a)'}=\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=A$. 同理可证 $f'_-(a)=A$.

分析：命题 6 给出求分段函数在连续点处的导数提供了一种方法，即在函数连续的条件下求导函数的极限. 设 $f(x)=\begin{cases}g(x), x\neq a\\l, x=a\end{cases}$，若 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=l$，即有 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=l=f(a)$，保证 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，$g(x)$ 在 $U_0(a)$ 可导且 $\lim\limits_{x\to a}g'(x)=A$（即 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=A$），于是有 $f'(a)=A$.

此命题给予了分段函数在分段点求导数时避免应用左右导数定义求解运算讨论的繁琐.

4 结语

通过对洛必达法则的内容进行梳理，并给予证明及推广探索，得出一系列命题. 命题可以直接应用解决一些极限问题. 基本未定式的极限直接可用洛必达法则求解，但其他 5 类未定式首先要转换成基本未定式才能求极限. 并对转换进行了分析. 应用洛必达法则求解极限技巧性强、灵活度大，有时会应用出错. 选择有代表性的案例对洛必达法则应用易错原因、连续应用求极限、数列极限求解、与其他求极限方法配合求极限、函数连续条件下的极限计算等进行了详细分析，为深入理解及灵活应用洛必达法则提供参考.

参考文献

[1] 杨雄. 洛必达法则的教学思考[J]. 保山学院学报，2018，37(2)：60－62.

[2] 赵士元. 数列及函数极限的几种特殊求法[J]. 佳木斯大学学报（自然科学版），2023，41(5)：177－180.

[3] 殷峰丽. 浅谈考研题中灵活应用洛必达法则[J]. 高等数学研究，2023，26(5)：15－16.

[4] 王丽丽. 洛必达法则在解析求极限类问题中的应用[J]. 河南工程学院学报（自然科学版），2022，34(1)：76－80.

[5] 王真. 未定式极限的几种解法探讨[J]. 产业与科技论坛，2024，23(9)：42－45.

[6] 韦慧，倪晋波. 高等数学中函数极限计算的几种方法[J]. 安阳工学院学报，2023，22(2)：93－96.

[7] 王建福. 高等数学（上、下册合订本）同步辅导及习题全解[M]. 徐州：中国矿业大学出版社，2006：156.

[8] 李正元. 高等数学辅导（同济：第五版）上册[M]. 北京：国家行政学院出版社，2004：125.

［执行编辑：牛景彦］

中国知网 https://www.cnki.net